

万有引力

一. 史实

托勒密 → 哥白尼 → 第谷 → 开普勒 →
(地心说) (日心说) 记录 → 归纳

→ 牛顿 → 卡文迪许 → 爱因斯坦

万有引力 $F_g \propto m_1 m_2$, $F_g \propto \frac{1}{r^2}$ 扭秤 → G 广义相对论

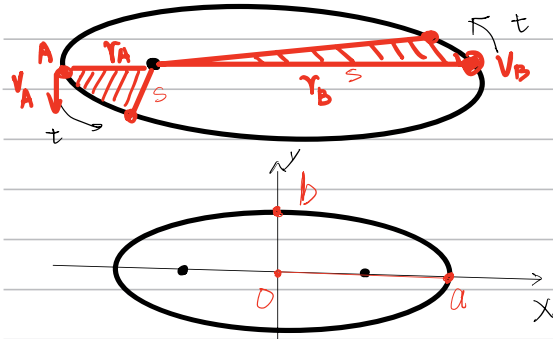
二. 开普勒三定律

① 轨道：椭圆，太阳焦点。

② 面积：速率 = $\frac{ds}{dt} = \frac{v}{r}$, $\frac{v_A}{r_A} = \frac{v_B}{r_B}$
(近日点 v_A , 远日点 v_B)

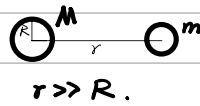
③ 周期： $\frac{a^3}{T^2} = k$ (k 只与 M 有关)

近似： $\frac{r^3}{T^2} = k$



a : 半长轴 类似 圆的半径 r .

三. 万有引力



① $F_{31} = G \frac{Mm}{r^2}$
(两个质点)

② $F_{31} = F_{向}$

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r = m \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \quad \omega^2 = G \frac{M}{r^3} \quad \frac{4\pi^2}{T^2} = G \frac{M}{r^3}$$

四. 小g问题.

$$① mg = m \frac{v^2}{R} \quad (\text{不考虑自转}).$$

$$\rightarrow GM = gR^2$$

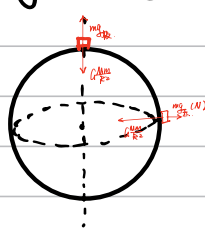
黄金代换

② 星球质量、密度

$$M \begin{cases} ① M = \frac{gR^2}{G} \quad (\text{星球表面 } F_g = mg) \\ ② M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \quad (\text{知道卫星 } r, T) \end{cases}$$

$$\rho \begin{cases} ① \frac{M}{V} = \frac{gR^2}{G \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3g}{4\pi GR} \\ ② \frac{M}{V} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3\pi r^3}{GT^2 R^3} \end{cases}$$

五. 双小g问题. (考虑星球自转)



$$\text{极地: } G \frac{Mm}{R^2} = mg_{\text{极}} \quad (\text{重力平衡}).$$

$$\text{赤道: } G \frac{Mm}{R^2} - mg_{\text{赤}} = m \frac{4\pi^2}{T^2} R \quad (\text{合外力} \rightarrow \text{向心力})$$

$$\therefore mg_{\text{极}} - mg_{\text{赤}} = m \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

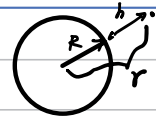
$$g_{\text{极}}, g_{\text{赤}}, T, R.$$

六. 小h问题.

1) R: 星球半径

r: 轨道半径

h: 轨道距地面半径

② h处重力加速度 $g_h = ?$

$$mg = G \frac{Mm}{(R+h)^2}$$

$$g = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

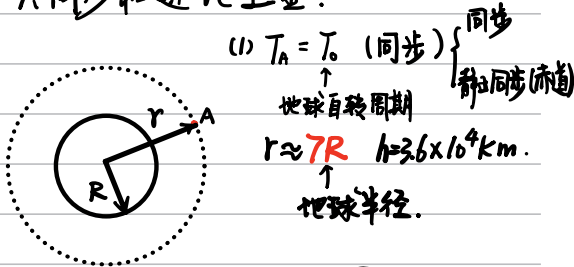
$$\text{在地面上 } g_0 = \frac{GM}{R^2}$$

$$\therefore \frac{g_h}{g_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

不同高度重力不一样. 相同质量物体在越高的地方重力越小.

七. 卫星问题.

1. 同步和近地卫星.

(2) 近地卫星 $r \approx R$. $T \approx 84 \text{ min}$

2. 三转

$$(1) v^2 = \frac{GM}{r} \quad r \uparrow \quad v \downarrow$$

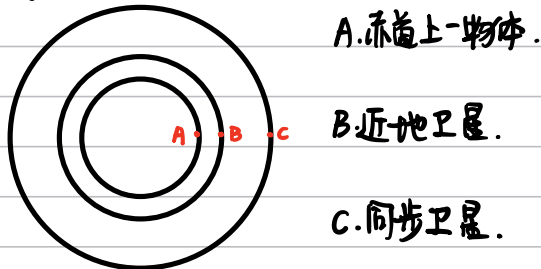
$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3} \quad r \uparrow \quad \omega \downarrow$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \quad r \uparrow \quad T \uparrow$$

高轨低速大周期.

大机小动大势能.

(2) 三转对比.

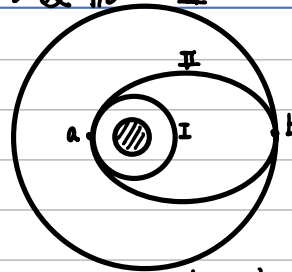


$$v_B > v_C > v_A$$

$$T_A = T_C > T_B$$

$$a_B > a_C > a_A$$

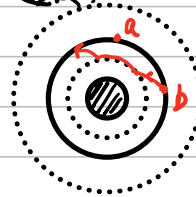
3. 变轨.

I $\rightarrow$ II: a点加速a $\rightarrow$ b 减速运动.

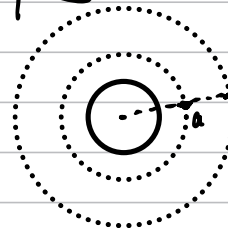
$$v_a > v_b.$$

II $\rightarrow$ III: b点加速.

4. 追及

b追a: 减速降轨.
加速升轨.a追b: 加速升轨.
减速降轨.

5. 相遇

 T_a : a卫星周期 T_b : b卫星周期.从此刻开始 $\rightarrow$ 相距最近.

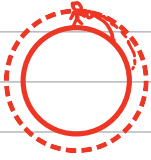
$$\frac{t}{T_a} - \frac{t}{T_b} = k \quad k=1, 2, 3, \dots$$

从此刻开始 $\rightarrow$ 相距最远.

$$\frac{t}{T_a} - \frac{t}{T_b} = \frac{1}{2} + k \quad k=1, 2, 3, \dots$$

八. 宇宙速度.

(1) 第一宇宙速度.



$$G \frac{Mm}{R^2} = m \frac{v^2}{R} \quad \leftarrow \text{代} \quad GM = gR^2$$

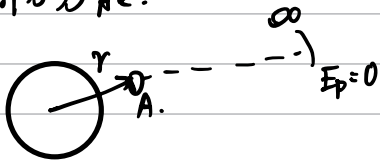
$$v = \sqrt{gR} \approx 7.9 \text{ km/s.}$$

地球半径

最小发射速度. 最大环绕速度.

(2) 第二宇宙速度. (脱离速度).

① 引力势能.



$$E_{pA} = - \frac{GMm}{r}$$

② 脱离地球 → 物体能飞到无限远.

$$\frac{1}{2}mv^2 \geq -G \frac{Mm}{R}$$

$$v \geq \sqrt{gR} \rightarrow \sqrt{2} v_1$$

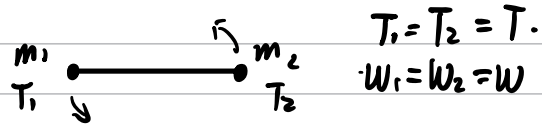
$$v_2 = 11.2 \text{ km/s}$$

③ 黑洞. $v_2 \geq c$ (3) 第三宇宙速度. $v_3 = 16.7 \text{ km/s}$

(逃离太阳系).

12. 多星系统.

1. 双星.



$$T_1 = T_2 = T.$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

$$\text{对 } m_1: G \frac{m_1 m_2}{L^2} = m_1 \omega^2 r_1 \quad \text{①}$$

$$\text{对 } m_2: G \frac{m_1 m_2}{L^2} = m_2 \omega^2 r_2 \quad \text{②}$$

$$r_1 + r_2 = L \quad \text{③}$$

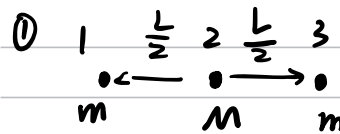
$$\frac{\text{①}}{\text{②}}: \frac{m_2}{m_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{即质量与半径成反比.}$$

$$\text{①} + \text{②}: \frac{G(m_1 + m_2)}{L^3} = \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$$



周期只与总质量以及L有关.

2. 三星.



$$\text{对 } 1: G \frac{mM}{(\frac{L}{2})^2} + G \frac{mm}{L^2} = m\omega^2 \frac{L}{2}$$

$$\text{②} \quad G \frac{m^2}{L^2} \cdot \sqrt{3} = m\omega^2 \frac{\sqrt{3}}{3} L$$